

Introducción a la Teoría de Conjuntos: Ejercicios Capítulo 2

A. F. Moreno Sarria, J. C. Prada Sierra, J. D. Vargas Polania, F. S. Abril Bermúdez.

Departamento de Física y Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

22 de Septiembre del 2020

1. Sección 2.3

1.1. Ejercicio 10

Dada una función $f : A \rightarrow B$ se define $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ como $g(X) = f[X]$, para todo $X \in \mathcal{P}(A)$. Demostrar que f es inyectiva si y solo si g es inyectiva.

Demostración. ($\implies$) Supongamos f inyectiva y sea $g(X_1) = g(X_2)$ se tiene por construcción que $g(X_1) = f[X_1] = f[X_2] = g(X_2)$ para todo $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ luego $X_1, X_2 \subseteq A$. Ahora, por definición

$$\begin{aligned}f[X_1] &= \{b_1 \in B : (\exists a_1 \in X_1)(f(a_1) = b_1)\} \\f[X_2] &= \{b_2 \in B : (\exists a_2 \in X_2)(f(a_2) = b_2)\}\end{aligned}$$

luego $b_1 = b_2$ por lo que $f(a_1) = f(a_2)$ como f es inyectiva $a_1 = a_2$, esto quiere decir que X_1 y X_2 tienen los mismos elementos luego $X_1 = X_2$, por lo tanto g es inyectiva.

($\impliedby$) Supongamos para este caso que g es inyectiva y además que $f(a_1) = f(a_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$

□