

Introducción a la Teoría de Conjuntos: Ejercicios Capítulo 1

A. F. Moreno Sarria, J. C. Prada Sierra, J. D. Vargas Polania, F. S. Abril Bermúdez.

Departamento de Física y Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

22 de Septiembre del 2020

1. Sección 1.3

1.1. Ejercicio 20

Entre las dos contenencias $\mathcal{P}(\bigcup A) \subseteq A$ y $A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A)$, una es siempre verdadera y la otra es falsa, en general. Demostrar la afirmación verdadera y un contraejemplo para la falsa.

Demostración. Primero, por los axiomas de uniones y separación se asegura la existencia de un conjunto $\bigcup A$ y por extensionalidad su unicidad. Asimismo, por el axioma de partes y separación se tiene la existencia del conjunto $\mathcal{P}(\bigcup A)$ y es único por extensionalidad.

Sea el conjunto definido por sus elementos $A = \{a, b\}$ y además $a = \{a'\}$ y $c = \{b', c\}$, por lo tanto $\bigcup A = \{a', b', c\}$ luego $\mathcal{P}(\bigcup A) = \{\{a'\}, \{b'\}, \{c\}, \{a', b'\}, \{b', c\}, \{a', c\}, \{a', b', c\}, \emptyset\}$, escrito de otra manera $\mathcal{P}(\bigcup A) = \{a, \{b'\}, \{c\}, \{a', b'\}, b, \{a', c\}, \bigcup A, \emptyset\}$, de aquí se observa rápidamente que la afirmación falsa es $\mathcal{P}(\bigcup A) \subseteq A$.

Supongamos $A = \emptyset$, luego $A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A)$. Si $A \neq \emptyset$, sea $x \in A$ luego por el axioma de uniones

$$\forall A \exists \bigcup A \forall z (\exists x (x \in A \wedge z \in x) \rightarrow z \in \bigcup A)$$

entonces $x \subseteq \bigcup A$, luego $x \in \mathcal{P}(\bigcup A)$. Por lo tanto, se demuestra que $A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A)$.

□